МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

БРАТСКИЙ ЦЕЛЛЮЛОЗНО – БУМАЖНЫЙ КОЛЛЕДЖ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БРАТСКИЙ ГОСУДАРСТЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Специальность
270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Методические рекомендации для выполнения практических работ по дисциплине «Математика»

Братск 2013

Составила: Е. В. Макович, преподаватель кафедры физико-математических и социально-гуманитарных дисциплин

Рассмотрено на заседании кафедры физико-математических и социально-гуманитарных дисциплин

«______» ______________ 2013 г. ___________________

подпись зав. кафедрой

Одобрено и утверждено РС

«_____» _____________2013 г. _________________

Содержание

Введение

Данное методическое пособие предназначено для студентов 2 курса специальности 270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”.

В каждом разделе представлены практические работы. В практических работах рассмотрены:

- теоретические сведения и справочный материал по теме;
- типовые задания с подробным решением;
- вопросы для самоконтроля;
- задания для самостоятельного выполнения студентами.

В разделе “Основы математического анализа” рассмотрены практические работы по темам:

1) вычисление пределов функции в точке и на бесконечности;
2) вычисление замечательных пределов;
3) дифференцирование функций, вычисление пределов функции с помощью правил Лопиталя;
4) применение производной к исследованию функций и построению графиков;
5) непосредственное интегрирование;
6) вычисление определенных интегралов;
7) вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов;
8) вычисление объемов тел;
9) решение дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными;
10) решение неполных дифференциальных уравнений второго порядка.

В разделе “Основы дискретной математики” рассмотрена практическая работа по теме “Основы дискретной математики ”.

В разделе “Основы теории вероятностей и математической статистики” рассмотрены практические работы по темам:

1) вычисление вероятностей простых и сложных событий;
2) распределение и характеристики дискретной случайной величины;
3) первичная обработка статистических данных.

В данном пособии важную роль играют иллюстрации, поэтому необходимо внимательно рассмотреть относящийся к тексту чертеж для лучшего понимания.

1 Основы математического анализа

1.1 Практическая работа №1

Тема: Вычисление пределов функции в точке и на бесконечности

Цель работы: научиться решать пределы в точке и на бесконечности, раскрывать неопределенности

$$\lim_{x\to a} c = c$$

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad (\lim_{x\to a} g(x) \neq 0)$$

$$\lim_{x\to 2} 5 = 5$$

$$\lim_{x\to 2} 5x^2 = 5\lim x^2 = 5 \cdot 2^2 = 20$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - 4x + 2) = \lim_{x\to 3} x^2 - 4\lim_{x\to 3} x + 2\lim_{x\to 3} 2 =$$

$$= 3^2 - 4 \cdot 3 + 2 = -1$$

$$\lim_{x\to 3}((x^3 + 1) \cdot (x-2)^{10}) =$$

$$= \lim_{x\to 3}(x^3 + 1) \cdot \lim_{x\to 3}(x-2)^{10} = (3^3 + 1)(3-2)^{10} =$$

$$= 28 \cdot 1 = 28$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)} = \frac{2+2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

Продолжение таблицы 1.1

$\lim\limits_{x\to a} x = a$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\lvert x\rvert} = \infty$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	*Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, *то* $\lim\limits_{x\to a} \frac{c}{f(x)} = \infty$ *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, *то* $\lim\limits_{x\to a} \frac{c}{f(x)} = 0$ *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, *то* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

2 Типовые задания с подробными решениями:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 5}{1+1} = \frac{-6}{2} = -3$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x) = -\infty$ (если $x\to\infty$, то функция $1-x$ стремится к минус бесконечности);

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-2x-3) = \infty$ (при $x\to\infty$ функция x^2-2x-3 неограниченно возрастает);

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^4+x-9} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{4^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty$.

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения.

Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда $x\to\infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

Итак, метод решения следующий: для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$.

В числителе и знаменателе находим x в старшей степени: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Максимальная степень в числителе 3. Максимальная степень в знаменателе: 4. Выбираем наибольшее значение, в данном случае четверку.

Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на x^4. Полное оформление задания может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\dfrac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x}^{\to 0}+\dfrac{15}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{9}{x^3}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\dfrac{6}{x^2}^{\to 0}-\dfrac{3}{x^3}^{\to 0}-\dfrac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$. Максимальная степень «икса» в числителе 2. Максимальная степень «икса» в знаменателе 1 (x можно записать как x^1). Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения.

Решить предел $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$. Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$.

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.**

Итак, решаем наш предел $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение: $2x^2-3x-5=0$

Сначала находим дискриминант: $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-5)=9+40=49$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$.

Далее находим корни:

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$2x^2-3x-5=2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$$

$$(*)=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

Очевидно, что можно сократить на $(x+1)$:

$$(*)=\lim_{x\to-1}(2x-5)=(*)$$

.

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Продолжаем рассматривать неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

$$\frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot 3-21}}{5\cdot 3-15}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$

Вспоминаем формулу разности квадратов: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ Умножаем числитель на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5x-15}$$

А для того, чтобы оно не менялось, нужно его разделить на то же самое:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

Применим вверху формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

$$(*) = \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})} = \lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{5x-15} = (*)$$

$$(*) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right) = -\frac{3}{10}$$

3 Вопросы для самоконтроля:

Как вычислить предел в точке?

Пределы с неопределенностью вида

Вариант №7

Вариант №8

Вариант №9

Вариант №10

Вариант №7

Вариант №8

1.2 Практическая работа №2

Тема: Вычисление замечательных пределов

Цель работы: Научиться решать первый и второй замечательные пределы

Дисциплина: математика

Курс: 2

Специальность: 27080 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”

Литература: Дадаян А. А. Математика:Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 5§11,12

1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

Формулы первого и второго замечательного пределов и их следствия представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Замечательные пределы

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ Следствия 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$	Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ Следствия 1. $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

2 Типовые задания с подробными решениями:

Первый замечательный предел.

Примеры:

✓ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1$;

✓ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{5x}{3}}{\sin\frac{5x}{3}}=1$;

✓ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(arctgx)}{arctgx}=1$;

✓ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-5x^2+x}{\sin(x^3-5x^2+x)}=1$.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$.

Сначала подставляем 0 в выражение под знак предела.

У нас есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, ее обязательно указываем в оформлении решения. Выражение под знаком предела у нас похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$.

Знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на ту же семерку.

(1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{1}{\sin 7x}}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$

Пробуем подставить в числитель и знаменатель ноль: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\dfrac{0}{0}$

Если есть неопределенность

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Под синусами у нас $\frac{x}{2}$, значит, в числителе тоже нужно получить $\frac{x}{2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}.$$

Аналогично предыдущему примеру, обводим карандашом замечательные пределы (здесь их два), и указываем, что они стремятся к единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

Второй замечательный предел.

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

Нетрудно заметить, что при $x\to\infty$ основание степени $\left(1+\frac{1}{3x}\right)\to 1$, а показатель – $4x\to\infty$, то есть имеется, неопределенность вида 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^\infty$$

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. В данном примере параметр $\alpha=3x$, значит, в показателе нам тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^\infty=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

Когда задание оформляется от руки, карандашом помечаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}$$

е (2-ой замечательный предел)

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}$$

Снова исполняем наш искусственный прием: возводим основание степени в $\frac{x+1}{-3}$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную дробь $\frac{-3}{x+1}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=$$

$$=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}}}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\overset{\to 0}{\frac{3}{x}}}{1+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}}=e^{-3\cdot 2}=e^{-6}$$

3 Вопросы для самоконтроля

Формулы 1 и 2 замечательных пределов?

Следствия 1 и 2 замечательных пределов?

4 Задания:

Вариант №1 Вариант №2

1.3 Практическая работа №3

Тема: Дифференцирование функций. Вычисление пределов функции с помощью правил Лопиталя.

Цель работы: научиться пользоваться правилами и формулами дифференцирования, находить производные элементарных функций, научиться решать пределы, используя правила Лопиталя.

Дисциплина: математика

Курс: 2

Специальность: 270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”

Литература: Дадаян А. А. Математика:Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 9§6,7

1. Основные теоретические сведения, справочный материал.

Дифференцирование – это операция нахождения производной функции.

Обозначения**:** Производную обозначают y' или $\frac{dy}{dx}$

Правила дифференцирования:

Постоянное число можно вынести за знак производной $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, (1)

где С- константа;

u- функция.

Производная произведения функций $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$, (2)

где u - функция;

v - функция.

Производная частного функций $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, (3)

где u - функция;

v - функция.

$y = f(U(x));\quad y' = f'(u) \cdot u'(x)$ - для сложной функции (4)

где f(u) - функция;

u(x) - функция.

Основные формулы дифференцирования представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Формулы дифференцирования

1. $(C)'=0$ 2. $(x)'=1$ 3. $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$ 4. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ 5. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 6. $(\ln x)'=\frac{1}{x};$ 7. $(\lg x)'=\lg e\cdot\frac{1}{x}$ 8. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$ 9. $(e^x)'=e^x$	10. $(\sin x)'=\cos x$ 11. $(\cos x)'=-\sin x$ 12. $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ 13. $(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ 14. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 15. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 16. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Теорема (правило Лопиталя). Пусть функции *f(x)* и *g(x)* дифференцируемы в некоторой окрестности точки *a*, за исключением, быть может, самой точки *a*, и пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Тогда, если существует предел отношения производных этих функций $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел отношения самих функций *f(x)/g(x)* при *x→a,* причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Правило Лопиталя можно также применять к неопределенностям типа $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$. Первые две неопределенности $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ можно свести к типу $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью алгебраических преобразований. А неопределенности $0^0,\ 1^\infty$ и ∞^0 сводятся к типу $0\cdot\infty$ с помощью соотношения $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$.

2 Типовые задания с подробными решениями:

Пример: Найти производную функции по формуле (1) $y=3\cos x$

$$y' = (3\cos x)' = 3(\cos x)' = 3(-\sin x) = -3\sin x$$

Пример: Найти производную функции $y = 6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11ctgx$

$$y' = \left(6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 11ctgx\right)' =$$

$$= (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - \left(2x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{-2}\right)' - (11ctgx)' =$$

$$= (6)' + (x)' + 3(x^2)' - (\sin x)' - 2\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{-2}\right)' - 11(ctgx)' =$$

$$= 0 + 1 + 3\cdot 2x - \cos x - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}} + (-2)\cdot x^{-3} - 11\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$$

$$= 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \frac{11}{\sin^2 x}$$

Пример: Найти производную функции по формуле (2) $y = x^3 \arcsin x$

$$y' = (x^3 \arcsin x)' = (x^3)' \arcsin x + x^3 (\arcsin x)' =$$

$$= 3x^2 \arcsin x + x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 3x^2 \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример: Найти производную функции по формуле (3) $y = \frac{2(3x-4)}{x^2+1}$

$$y' = \left(\frac{2(3x-4)}{x^2+1}\right)' = 2\cdot\left(\frac{3x-4}{x^2+1}\right)' =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{(3x-4)'(x^2+1) - (3x-4)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{3\cdot(x^2+1) - (3x-4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\right) = 2\cdot\left(\frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 8x}{(x^2+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{2(-3x^2 + 8x + 3)}{(x^2+1)^2}$$

Пример: Найти производную функции по формуле (4) $y = \sin(3x-5)$

$$y = \underbrace{\boxed{\sin\underbrace{(3x-5)}_{v}}}_{u(v)}$$

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5)\cdot(3x-5)' = \cos(3x-5)\cdot(3-0) =$$

$$= 3\cos(3x-5)$$

Пример: Найти производную функции $y=(2x+1)^5$

$$y = \underbrace{\boxed{(\underbrace{2x+1}_{v})^5}}_{u(v)}$$

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)' =$$
$$= 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2+0) = 10\cdot(2x+1)^4$$

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

Дифференцируя числитель и знаменатель, находим значение предела:

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\left(a^x-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to0}\frac{a^x\ln a}{1}=\ln a\lim_{x\to0}a^x=\ln a\cdot1=\ln a.$$

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}$.

Поскольку прямая подстановка приводит к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$, применяем правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{7+x}}}{1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{7+x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

Здесь мы имеем дело с неопределенностью типа $\infty-\infty$. После простых преобразований, получаем

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to2}\frac{4-(x+2)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{2-x}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(2-x)'}{\left(x^2-4\right)'}=\lim_{x\to2}\left(\frac{-1}{2x}\right)=-\frac{1}{4}.$$

Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(2^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln2}=\frac{2}{\ln2}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{2}{\ln2}\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{\left(2^x\right)'}=$$

$$=\frac{2}{\ln2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x\ln2}=\frac{2}{(\ln2)^2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x}=\frac{2}{(\ln2)^2}\cdot0=0.$$

3 Вопросы для самоконтроля:
Производная от константы чему равна?
Чему равна производная суммы двух функций?
Чему равна производная произведения двух функций?
Чему равна производная частного функций?
Производная первого порядка?
Производная второго порядка?
Правило Лопиталя для чего применяется?
4 Задания:

Вариант № 1

1. $y = 10x^3 - 2x^2 - 1$
2. $y = 5x - \sqrt{2x-1}$
3. $y = 2\cos x - 3\sin 4x$
4. $y = \frac{1}{2}tgx + 3ctgx$
5. $y = 2\arcsin x^2 - 3arctg4x$
6. $y = x^3 \cdot (1-x)$
7. $y = e^{6x} \cdot \ln x$
8. $y = \frac{2x+1}{2x-1}$

Вариант № 2

1. $y = 3x^4 + 2 - 7x^3$
2. $y = x - \frac{\sqrt{19x+3}}{2}$
3. $y = \frac{\cos x}{3} - 5\sin 6x$
4. $y = tg\frac{5x}{3} - ctg^3 x$
5. $y = 4arctgx - 3arcctgx$
6. $y = x^2 \cdot (x+2)$
7. $y = 7^{6x} \cdot \frac{1}{x}$
8. $y = \frac{2+3x}{2-3x}$

Вариант № 3

1. $y = 7x^3 + 5x^2 - 3$
2. $y = \frac{x}{3} + 2\sqrt{7x-8}$
3. $y = 5\cos x + 2\sin 4x$
4. $y = 2tg4x - ctg\frac{x}{3}$
5. $y = 3\arccos x + 2arcctgx$
6. $y = x^2 \cdot (2-3x)$
7. $y = 4^x \cdot \ln(x+1)$
8. $y = \frac{3x+1}{3x-1}$

Вариант № 4

1. $y = 3x^3 + 2x - 5$
2. $y = \frac{x}{7} - 6\sqrt{5x-9}$
3. $y = \sin 5x + \cos 6x$
4. $y = 6tg7x - \frac{1}{4}ctgx$
5. $y = 7\arccos x + 2\arcsin x$
6. $y = x^4 \cdot (2-x)$
7. $y = 2^x \cdot e^{3x}$
8. $y = \frac{3x+4}{3x-4}$

Вариант № 5

1. $y = 8x^5 + 3x^2 - 5x$
2. $y = 2x + 5\sqrt{4x+6}$
3. $y = 2\sin^3 x - \frac{\cos 5x}{5}$

Вариант № 6

1. $y = 3x^5 - 4x^2 + 10x^3$
2. $y = \frac{8}{x} + \frac{\sqrt{7x+6}}{2}$

4. $y=\frac{1}{2}ctgx-7tg8x$

5. $y=2\arccos x-3arctgx$

6. $y=x^4\cdot(1-2x)$

7. $y=4e^x\cdot\ln 5x$

8. $y=\frac{7x+1}{1-7x}$

3. $y=\frac{\sin x}{3}+9\cos 6x$

4. $y=ctgx-\frac{tg5x}{5}$

5. $y=arcctg9x-3arctg^3x$

6. $y=x^3\cdot(5x+2)$

7. $y=e^x\cdot\frac{1}{x}$

8. $y=\frac{5+4x}{5-4x}$

Вариант № 7

1. $y=12x-7x^4+5x^2-3$

2. $y=e^x+2\sqrt{5x-8}$

3. $y=7\cos 4x-\frac{\sin x}{2}$

4. $y=5tg\frac{x}{4}+\frac{1}{4}ctg^2x$

5. $y=12\arcsin x-5arcctgx$

6. $y=x\cdot\left(x^2-3\right)$

7. $y=8^x\cdot\ln 6x$

8. $y=\frac{9x+2}{2-9x}$

Вариант № 8

1. $y=15x^2+9x-5x^3$

2. $y=\frac{1}{7}-4\sqrt{7x}$

3. $y=14\sin 5x-3\cos x$

4. $y=tgx^3-\frac{ctg2x}{4}$

5. $y=9\arccos x-5arctgx$

6. $y=2x^3\cdot(1-7x)$

7. $y=4\ln x\cdot e^{7x}$

8. $y=\frac{7x+3}{7x-3}$

Вариант № 9

1. $y=7x+5x^2-9$

2. $y=6^{3x+1}+9\sqrt{2x-78}$

3. $y=7\cos x-9\sin 10x$

4. $y=\frac{tgx}{3}-8ctgx$

5. $y=7\arcsin x-8arctgx$

6. $y=x^5\cdot(2-x)$

7. $y=5e^x\cdot\ln 6x$

8. $y=\frac{8x+1}{8x-1}$

Вариант № 10

1. $y=3x^4+2x-6x^3$

2. $y=7x-\frac{\sqrt{3x-8}}{2}$

3. $y=\frac{\cos x}{2}+\sin 7x-1$

4. $y=\frac{1}{2}tg(3x-5)-2ctg6x+4$

5. $y=4\cdot(arctgx-arcctg8x)$

6. $y=x^2\cdot(3-x)$

7. $y=6^x\cdot\frac{2}{x}$

8. $y=\frac{2+7x}{2-7x}$

1.4 Практическая работа №4

Тема: Применение производной к исследованию функций и построению графиков.

Цель работы: научиться находить экстремумы, наибольшее, наименьшее значения, промежутки монотонности функции.

Дисциплина: математика

Курс: 2

Специальность: 270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”

Литература: Дадаян А. А. Математика:Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 9§9, 10, 11, 12,13,14

1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

Достаточное условие возрастания функции представлено на рисунке 4.1.

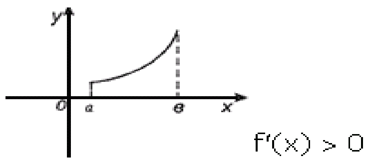


Рисунок 4.1 - Условие возрастания функции

Если в каждой точке интервала (a, b) $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Достаточное условие убывания функции представлено на рисунке 4.2.

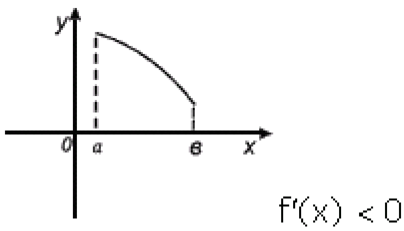


Рисунок 4.2 - Условие убывания функции

Если в каждой точке интервала (a, b) $f'(x)<0$, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Определение:

x_0 называется критической точкой функции $f(x)$, если:

1) x_0 – внутренняя точка области определения $f(x)$;

2) $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Необходимое условие экстремума:

Если x_0– точка экстремума функции f(x), то эта точка является критической точкой данной функции.

Достаточное условие экстремума:

Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак, то x_0 – точка экстремума функции f(x).Точки экстремума функции представлены на рисунке 4.3.

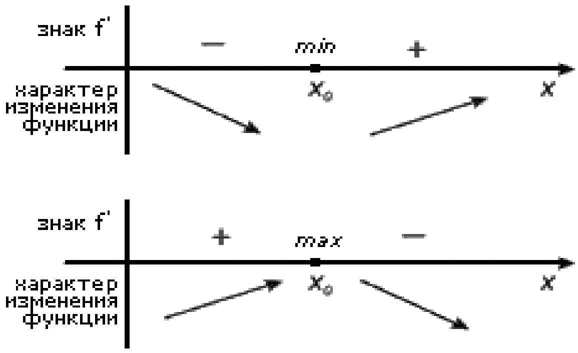


Рисунок 4.3 – Точки экстремума функции

Примеры экстремумов представлены на рисунке 4.4

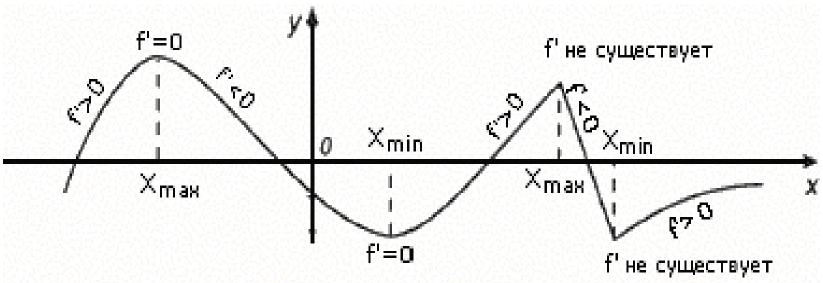


Рисунок 4.4 - Точки экстремума функции

Схема исследования функции:

a) найти область определения функции;
b) проверить, не является ли функция четной или нечетной; проверить также, не является ли она периодической;
c) найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции;
d) найти производную функции, и ее критические точки;
e) найти промежутки монотонности и экстремумы функции.

1. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f(x), непрерывной на отрезке [a; b]:

1) найти значения функции в концах отрезка, т.е. f(a) и f(b);
2) найти значения функции в тех критических точках, которые принадлежат интервалу (a; b);
3) из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

2 Типовые задания с подробными решениями

Пример1. Исследовать функцию $f(x)=x^3-3x^2+4$ с помощью производной и построить ее график.

Решение:

1) $D(f) = R$

2) $f'(x) = 3x^2 - 6x$,
$D(f') = R$

3) $f'(x) = 0$;
$3x^2 - 6x = 0$,
$x^2 - 2x = 0$
$x = 0, x = 2$ - критические точки представлены на рисунке 4.5.

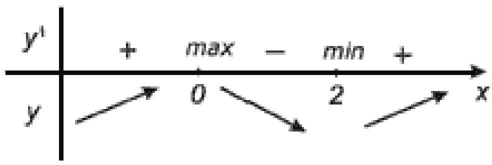
4) 

Рисунок 4.5 - Точки экстремума функции.

x=0 – точка максимума, x=2 – точка минимума.

5) f(0)=4; f(2)=0

Используя результаты исследования, строим график функции : $f(x)=x^3-3x^2+4$

График функции представлен на рисунке 4.6.

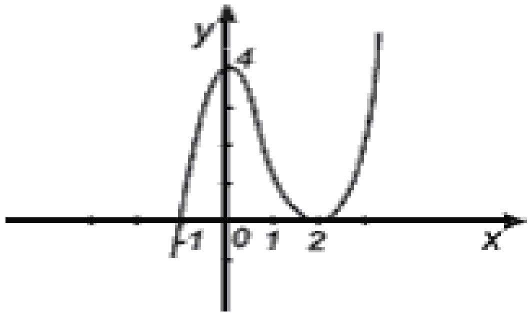


Рисунок 4.6 - График функции $f(x)=x^3-3x^2+4$

Пример2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$

на отрезке $\left[\frac{1}{2};2\right]$

Решение:

$D(f): x \in R, x \neq 0.$

1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=6\frac{1}{8};$

$f(2)=9\frac{1}{2}$

2) $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3x^4-3}{x^2};$

$\frac{3x^4-3}{x^2}=0,$

$3x^4-3=0$

$x_1=1; x_2=-1$

$1\in\left(\frac{1}{2};2\right);$

$-1\notin\left(\frac{1}{2};2\right)$

$f(1)=4$

3) Из чисел $6\frac{1}{8};\ 9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

Ответ**:** $\max\limits_{[\frac{1}{2};2]} f(x)=9\frac{1}{2};\quad \min\limits_{[\frac{1}{2};2]} f(x)=4;$

3 Вопросы для самоконтроля:
Какие точки графика называются точками перегиба?
Сформулируйте правила исследования функции на точки перегиба.
Что необходимо знать для построения графика функции?
4 Задания:

Вариант №1

Дана функция $y=x^3+3x^2-4$.

Найдите:

1) промежутки возрастания и убывания функции;
2) точки экстремума;
3) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [-4; 1].

Постройте график функции $y= x^3 +3x^2-4$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y=3\sqrt{x}$ в точке $x=1$.

Постройте график функции

Вариант №2

Дана функция $y=0,25x^4- 2x^2$.
Найдите:

1) промежутки возрастания и убывания функции;
2) точки экстремума;
3) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [-3; 1].

Постройте график функции $y=0,25x^4- 2x^2$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y=9/x$ в точке $x=3$.

Постройте график функции

Дана функция $y=x^3-3x^2+4$.
Найдите:

1) промежутки возрастания и убывания функции;
2) точки экстремума;
3) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [-1; 4].

Постройте график функции $y= x^3 -3x^2 +4$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y=4\sqrt{x}$ в точке $x=4$.

Постройте график функции $y=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

Вариант №4

Дана функция $y=0,5x^4- 4x^2$.

Найдите:

1) промежутки возрастания и убывания функции;
2) точки экстремума;
3) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [-1; 3].

Постройте график функции $y=0{,}5\,x^4 - 4x^2$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y=6/x$ в точке $x=3$.

Постройте график функции $y=\dfrac{8x}{x^2+4}$.

Вариант №5

Дана функция $y=x^3+5x^2-44$.

Найдите:

1) промежутки возрастания и убывания функции;
2) точки экстремума;
3) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [-5; 3].

Постройте график функции $y= x^3 +5x^2-44$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y=4\sqrt{x}$ в точке $x=1$.

Постройте график функции

Вариант №6

Дана функция $y=0{,}25x^3- x^2$.

Найдите:

1) промежутки возрастания и убывания функции;
2) точки экстремума;
3) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [-4; 1].

Постройте график функции $y=0{,}25x^3- x^2$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y=4/x$ в точке $x=3$

Постройте график функции

Дана функция $y=x^4-3x^2+4$.

Найдите:

1) промежутки возрастания и убывания функции;
2) точки экстремума;

3) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [-1; 4].

Постройте график функции $y= x^4 -3x^2 +4$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y=5\sqrt{x}$ в точке $x=3$.

Постройте график функции $y=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

Вариант №8

Дана функция $y=0,5x^3- 4x^2$.
Найдите:
1) промежутки возрастания и убывания функции;
2) точки экстремума;
3) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [-2; 4].

Постройте график функции $y=0,5\,x^3 - 4x^2$.

Составьте уравнение касательной к графику функции $y=7/x$ в точке $x=3$.

Постройте график функции $y=\frac{8x}{x^2+4}$.

1.5 Практическая работа №5

Тема: Непосредственное интегрирование.
Цель работы: научиться находить неопределенные интегралы
Дисциплина: математика
Курс: 2
Специальность: 270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”
Литература: Дадаян А. А. Математика: Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 10§4, 5
1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ или для дифференциала $f(x)dx$ называется неопределенным интегралом и обозначается:
$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (1)$$

где $\int$ – значок интеграла;

$f(x)$ - подынтегральная функция;

dx – значок дифференциала;

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

$F(x)$ – первообразная функция;

$F(x)+C$ – множество первообразных функций.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1) Постоянный множитель выносится за знак интеграла: $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$.

2) Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций: $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Основные табличные интегралы приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 –Табличные интегралы

1. $\int 0dx = c$, c – *постоянная*;

2. $\int kdx = kx + c$;

3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c;\ \alpha \neq -1$;

4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$;

5. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + c$;

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;

7. $\int \cos x dx = \sin x + c$;

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;

10. $\int \sin(kx+b)dx = -\dfrac{1}{k}\cos(kx+b) + c$;

11. $\int \cos(kx+b)dx = \dfrac{1}{k}\sin(kx+b) + c$;

12. $\int (kx+b)^{\alpha} dx = \dfrac{1}{k}\dfrac{(kx+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$;

13. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$;

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$;

15. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$;

16. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$;

17. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + c$;

18. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + c$;

19. $\int e^x dx = e^x + c$;

20. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + c$;

21. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$;

22. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + c$;

23. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$;

24. $\int \dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \dfrac{A}{2a}\int \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx +$;

$+(B - \dfrac{Ab}{2a})\int \dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$;

25. $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$ *или* $\int udv = uv - \int vdu$;

2 Типовые задания с подробными решениями

Найти неопределенный интеграл.

$$\int\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx\overset{(1)}{=}$$

$$=\int xdx+\int\sqrt{x}dx-\int 3x^5dx+\int\frac{2dx}{x^3}-\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int tg5dx\overset{(2)}{=}$$

$$=\int xdx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^5dx+2\int x^{-3}dx-\int\frac{dx}{\sin^2 x}+tg5\int dx\overset{(3)}{=}$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}-3\cdot\frac{1}{6}x^6+2\cdot\frac{1}{(-2)}\cdot x^{-2}-(-ctgx)+tg5\cdot x+C\overset{(4)}{=}$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C,\ \text{где}\ C=const$$

(1) Применяем правило $\int(u\pm v)dx=\int udx\pm\int vdx$. Не забываем записать значок дифференциала dx под каждым интегралом.

(2) Согласно правилу $\int Cudx=C\int udx$ выносим все константы за знаки интегралов. Обратите внимание, что в последнем слагаемом $tg5$ – это константа, её также выносим.
Кроме того, на данном шаге готовим корни и степени для интегрирования. Точно так же, как и при дифференцировании, корни надо представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$. Корни и степени, которые располагаются в знаменателе – перенести вверх.

Примечание: в отличие от производных, корни в интегралах далеко не всегда следует приводить к виду $x^{\frac{a}{b}}$, а степени переносить вверх. Например, $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$ – это готовый табличный интеграл

Внимательно изучите таблицу!

(3) Все интегралы у нас табличные. Осуществляем превращение с помощью таблицы, используя формулы: $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ (n\neq -1)$, $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-ctgx+C$ и $\int dx=x+C$.
Константу C достаточно приплюсовать один раз в конце выражения (а не ставить их после каждого интеграла).

Найти неопределенный интеграл $\int x^2(3+4x)^2dx$.

$$\int x^2(3+4x)^2dx \overset{(1)}{=} \int x^2(9+24x+16x^2)dx \overset{(2)}{=} \int (9x^2+24x^3+16x^4)dx \overset{(3)}{=}$$

$$= 9\int x^2dx + 24\int x^3dx + 16\int x^4dx \overset{(4)}{=} 9\cdot\frac{1}{3}x^3 + 24\cdot\frac{1}{4}x^4 + 16\cdot\frac{1}{5}x^5 + C \overset{(5)}{=}$$

$$= 3x^3 + 6x^4 + \frac{16}{5}x^5 + C,\ \text{где } C = const$$

(1) Используем формулу квадрата суммы $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, избавляясь от степени.

(2) Вносим x^2 в скобку, избавляясь от произведения.

(3) Используем свойства линейности интеграла (оба правила сразу).

(4) Превращаем интегралы по табличной формуле $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$.

(5) Упрощаем ответ.

Пример 3: Вычислите интеграл: $\int\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x}\right)dx$. Решение: Распишем дробь на два слагаемых $\int\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$. По правилу $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ получим $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx = \int\frac{dx}{x} + \int\frac{\sqrt{x}}{x}dx$. По свойству степеней $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, получаем $\int\frac{dx}{x} + \int\frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int\frac{dx}{x} + \int x^{\frac{1}{2}-1}dx = \int\frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{1}{2}}dx$. По формулам $\int\frac{dx}{x} = \ln x + c$; $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, получим $\int\frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \ln x + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \ln x + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$

$$= \ln x + 2\cdot\sqrt{x} + c.$$

Пример 4: Вычислите интеграл: $\int e^{3x}dx$. Решение: Выполним замену, получим

$$\int e^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x \\ u'du = (3x)'dx = 3dx \\ du = 3dx \quad dx = \dfrac{du}{3} \end{array} \right| = \int e^{u} \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\cdot\int e^{u}du = \frac{1}{3}\cdot e^{u} + c = \frac{1}{3}\cdot e^{3x} + c$$

Здесь использовали формулу $\int e^{x}dx = e^{x} + c$

3 Вопросы для самоконтроля:

Что такое первообразная функция?

Что такое неопределенный интеграл?

Перечислите основные свойства интеграла.

4Задания:

Задание: найти интегралы.

Вариант 1

1. $\int (\frac{x}{2} + x^{-3})dx$
2. $\int (1+x)^2 dx$
3. $\int (15\cdot 7^{x} + x^{7})dx$
4. $\int \left(\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{3}{\cos^2 x}\right)dx$
5. $\int \dfrac{5}{16+(9x)^2}dx$
6. $\int \dfrac{2}{\sqrt{25-x^2}}dx$

Задание: найти интегралы.

Вариант 2

1. $\int (4x^{-5} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$
2. $\int 3(x-2)^2 dx$
3. $\int (3^{x} - e^{2x})dx$
4. $\int (3\cos x + 2\sin x)dx$
5. $\int \dfrac{2}{9+x^2}dx$
6. $\int \dfrac{3}{\sqrt{36-(4x)^2}}dx$

Задание: найти интегралы.

Вариант 3

1. $\int (\frac{x^{-12}}{2} + \sqrt[3]{x})dx$
2. $\int x^2\cdot\left(x^3 - 3x\right)dx$
3. $\int 4\cdot 5^{x}dx$
4. $\int (1-2\cos 3x)dx$
5. $\int \dfrac{3}{81+x^2}dx$
6. $\int \dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Задание: найти интегралы.

Вариант 4

1. $\int (25x^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}})dx$
2. $\int (6+x)\cdot(x^3+9)dx$
3. $\int (5x^4 - 4^{x})dx$
4. $\int 9tg3xdx$
5. $\int \dfrac{5x}{64+x^2}dx$
6. $\int \dfrac{8}{\sqrt{49-x^2}}dx$

Задание: найти интегралы.

Вариант 6

Задание: найти интегралы.

Вариант 5

1. $\int (3x - \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}})dx$

2. $\int \left(8x^{-9} - 3^x\right)dx$

3. $\int \left(\frac{5}{\sin^2 x} - e^{3x}\right)dx$

4. $\int (x+5)^2 dx$

5. $\int \frac{4x}{9-x^2}dx$

6. $\int \frac{3}{\sqrt{16-x^2}}dx$

Задание: найти интегралы.

Вариант 7

1. $\int (10x^{\frac{3}{4}} - 3x^8)dx$

2. $\int \left(x^2+3\right)\cdot\left(x^3-3\right)dx$

3. $\int \left(x^2 + 2^x\right)dx$

4. $\int \left(2e^{3x} + \sin 3x\right)dx$

5. $\int \frac{3}{49+x^2}dx$

6. $\int \frac{4}{\sqrt{64-x^2}}dx$

Задание: найти интегралы.

Вариант 9

1. $\int 8\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$

2. $\int 2(x-11)^2 dx$

3. $\int 2\cdot 5^x dx$

4. $\int \left(e^{4x} - 7\cos 3x\right)dx$

5. $\int \frac{8}{16+x^2}dx$

6. $\int \frac{5}{\sqrt{25+x^2}}dx$

Задание: найти интегралы.

Вариант 11

1. $\int \frac{4\sqrt[3]{x}}{5}dx$

2. $\int (13+2x)^2 dx$

1. $\int 9x^2 dx$

2. $\int (2-x)\cdot\left(x-x^3\right)dx$

3. $\int \left(4\frac{\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)dx$

4. $\int \left(2x^2 + \sin 5x\right)dx$

5. $\int \frac{5}{16+x^2}dx$

6. $\int \frac{5}{\sqrt{25-x^2}}dx$

Задание: найти интегралы.

Вариант 8

1. $\int \frac{4}{2x-1}dx$

2. $\int (x+2)^2 dx$

3. $\int \left(4^x - 2x^{-3}\right)dx$

4. $\int (3 - 2\sin 3x)dx$

5. $\int \frac{8}{4+x^2}dx$

6. $\int \frac{3}{\sqrt{25-x^2}}dx$

Задание: найти интегралы.

Вариант 10

1. $\int \frac{4}{\sqrt[3]{x}}dx$

2. $\int \left(x^5-1\right)\cdot(x+2)dx$

3. $\int \frac{2^x}{4}dx$

4. $\int \left(2e^x - 3\sin\frac{x}{4}\right)dx$

5. $\int \frac{3}{1-x^2}dx$

6. $\int \frac{5}{\sqrt{16-x^2}}dx$

Задание: найти интегралы.

Вариант 12

3. $\int 4\cdot 3^{x}dx$

4. $\int\left(\frac{4}{\sin^2 2x}+\frac{5}{\cos^2 3x}\right)dx$

5. $\int\frac{5}{81+(4x)^2}dx$

6. $\int\frac{2}{\sqrt{100-x^2}}dx$

1. $\int 9\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$

2. $\int(3x-7)^2dx$

3. $\int\left(2-8e^{-5x}\right)dx$

4. $\int(6\cos 4x-5\sin x)dx$

5. $\int\frac{12}{4-x^2}dx$

6. $\int\frac{5}{\sqrt{3-x^2}}dx$

1.6 Практическая работа №6

Тема: Вычисление определенных интегралов.

Цель работы: научиться вычислять определенные интегралы

Дисциплина: математика

Курс: 2

Специальность: 270802.51 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”

Литература: Дадаян А. А. Математика:Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 10§6, 10, 12

1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

В общем виде определенный интеграл записывается так: $\int_a^b f(x)dx$

Нижний предел интегрирования обозначается буквой a. Верхний предел интегрирования обозначается буквой b. Отрезок $[a;b]$ называется *отрезком интегрирования*.

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx=F(X)\Big|_a^b=F(b)-F(a) \qquad (1)$$

где

dx

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

$F(x)$ – первообразная функция;

Этапы решения определенного интеграла:

1. Сначала находим первообразную функцию $F(X)$ (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа C в определенном интеграле никогда не добавляется.

2. Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию $F(b)$.

3. Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию $F(a)$.

4. Рассчитываем разность $F(b)-F(a)$, то есть, находим число.

Как и для неопределенного интеграла, для определенного интеграла справедливы свойства линейности:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,\ где\ C = const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$ – это справедливо не только для двух, но и для любого количества функций.

В определенном интеграле можно переставить верхний и нижний предел, сменив при этом знак: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2 Типовые задания с подробными решениями:

Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 2x^2dx$

$$\int_1^2 2x^2dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3-1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку.

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел.

Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx$

Решение:

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx \overset{(1)}{=} 8\int_{-2}^{4}dx + 2\int_{-2}^{4}xdx - \int_{-2}^{4}x^2dx \overset{(2)}{=} 8(x)\Big|_{-2}^{4} + 2\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^{4} - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^{4} \overset{(3)}{=}$$

$$= 8(4-(-2)) + (4^2-(-2)^2) - \frac{1}{3}(4^3-(-2)^3) = 8\cdot 6 + (16-4) - \frac{1}{3}(64+8) =$$

$$= 48+12-24 = 36$$

(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница:

$F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Замена переменной в определенном интеграле.

Вычислить определенный интеграл $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$

Главный вопрос здесь вовсе не в определенном интеграле, а в том, как правильно провести замену. Смотрим в таблицу интегралов, на что у нас больше всего похожа подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный логарифм: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C$. в табличном интеграле под корнем x^2, а в нашем – «икс» в четвёртой степени. Сначала готовим наш интеграл к замене:

$$\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2)^2+16}} = (*)$$

замена: $t = x^2$

Таким образом, в знаменателе будет всё хорошо: $\sqrt{t^2+16}$. Выясняем, во что превратится оставшаяся часть xdx подынтегрального выражения, для этого находим дифференциал dt :

$dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$

Находим новые переделы интегрирования.

Это достаточно просто. Смотрим на нашу замену $t = x^2$ и старые пределы интегрирования $a = 0$, $b = \sqrt{3}$.

Сначала подставляем в выражение замены $t = x^2$ нижний предел интегрирования, то есть, ноль:

$t_1 = 0^2 = 0$

Потом подставляем в выражение замены $t = x^2$ верхний предел интегрирования, то есть, корень из трёх: $t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2+16}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left|t+\sqrt{t^2+16}\right|\right)\Big|_0^3 \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln\left(3+\sqrt{25}\right)-\ln\left(0+\sqrt{0+16}\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,35$$

(1) В соответствии с заменой записываем новый интеграл с новыми пределами интегрирования.

(2) Это простейший табличный интеграл, интегрируем по таблице. Константу $\frac{1}{2}$ лучше оставить за скобками (можно этого и не делать), чтобы она не мешалась в дальнейших вычислениях. Справа отчеркиваем линию с указанием новых пределов интегрирования $\Big|_0^3$ – это подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

3 Вопросы для самоконтроля:

Формула Ньютона-Лейбница?

Свойство линейности?

Какой предел подставляем сначала (верхний или нижний)?

4 Задания:

Вариант 1

Вычислить интегралы:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$;

Вариант 2

Вычислить интегралы:

а) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

б) $\int_{1}^{2} \frac{2dx}{9-x^2}$;

в) $\int_{-1}^{3} x^4 dx$;

г) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 5tg\, 2x dx$

Вариант 3

Вычислить интегралы:

а) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$;

б) $\int_{0}^{1} \frac{2dx}{1+x^2}$;

в) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 4x dx$;

г) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{1-x^2}$

Вариант 5

Вычислить интегралы:

а) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos 3x dx$;

б) $\int_{1}^{2} \frac{2dx}{16-x^2}$;

в) $\int_{0}^{2} \left(5x^3+6\right) dx$;

г) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{4x}$

Вариант 7

1. Вычислить интегралы:

б) $\int_{0}^{1} 3e^x dx$;

в) $\int_{0}^{1} \frac{4dx}{1+x^2}$;

г) $\int_{1}^{4} \sqrt{3x} dx$

Вариант 4

Вычислить интегралы:

а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

б) $\int_{0}^{1} \frac{4dx}{4-x^2}$;

в) $\int_{-2}^{1} 3e^{4x} dx$;

г) $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{5dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Вариант 6

Вычислить интегралы:

а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$;

б) $\int_{0}^{3} \frac{4dx}{9+x^2}$;

в) $\int_{1}^{4} \frac{5dx}{x}$;

г) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Вариант 8

Вычислить интегралы:

а) $\int_{1}^{3}\frac{3dx}{x}$;

б) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{4dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

в) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

б) $\int_{0}^{2}4e^{5x}dx$.

Вариант 9

Вычислить интегралы:

а) $\int_{-1}^{1}e^{x}dx$;

б) $\int_{0}^{3}\frac{5dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos 2x dx$;

г) $\int_{-1}^{3}\left(x^3+1\right)dx$.

а) $\int_{1}^{3}\frac{1}{2}e^{3x}dx$;

б) $\int_{1}^{4}\frac{6dx}{5x}$;

в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos^2 x}dx$;

г) $\int_{3}^{4}\frac{dx}{25-x^2}$.

Вариант 10

Вычислить интегралы:

а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4dx}{\cos^2 x}$;

б) $\int_{1}^{2}3x^2dx$;

в) $\int_{0}^{\pi}\sin 2x dx$;

г) $\int_{0}^{2}\frac{9dx}{x}$.

1.7 Практическая работа №7

Тема: Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.

Цель работы: научиться вычислять площади фигур

Дисциплина: математика

Курс: 2

Специальность: 270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”

Литература Дадаян А. А. Математика:Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 10§15

1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная графиком некоторой функции, осью и прямыми, представлена на рисунке 7.1.

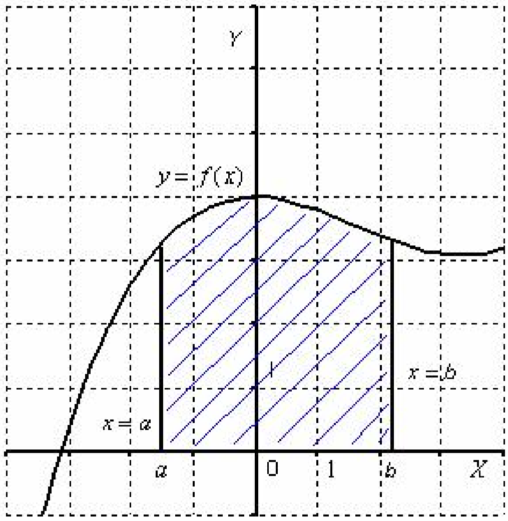


Рисунок 7.1 – Криволинейная трапеция

Площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Внимание! Не следует путать два типа задач:

1) если Вам предложено решить просто определенный интеграл без всякого геометрического смысла, то он может быть отрицательным;

2) если Вам предложено найти площадь фигуры с помощью определенного интеграла, то площадь всегда положительна.

2 Типовые задания с подробными решениями

Пример 1:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$, как показано на рисунке 7.2.

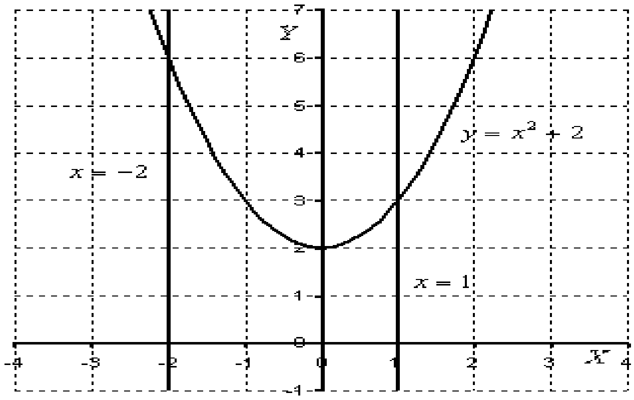


Рисунок 7.2 – Фигура ограниченная линиями

На отрезке $[-2;1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен над осью OX, поэтому:

$$S = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Ответ: $S = 9\ ед^2$

Пример 2:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $x = 2$, $x = 4$ и осью OX, как показано на рисунке 7.3.

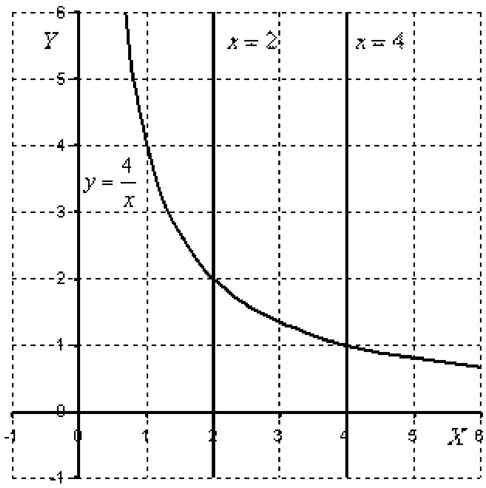


Рисунок 7.3 – Фигура ограниченная линиями

На отрезке $[2;4]$ *график функции* $y = \frac{4}{x}$ *расположен над осью* OX, *поэтому:*

$$S=\int_2^4 \frac{4dx}{x}=4(\ln x)\Big|_2^4=4(\ln 4-\ln 2)=4\ln\frac{4}{2}=4\ln 2$$

Пример 3:

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-x$, как показано на рисунке 7.4.

Решение: Сначала нужно выполнить чертеж. Найдем точки пересечения параболы $y=2x-x^2$ и прямой $y=-x$. Это можно сделать двумя способами. Первый способ – аналитический. Решаем уравнение:

$2x-x^2=-x$

$3x-x^2=0$

$x(3-x)=0$

$x_1=0,\ x_2=3$

Значит, нижний предел интегрирования $a=0$, верхний предел интегрирования $b=3$.

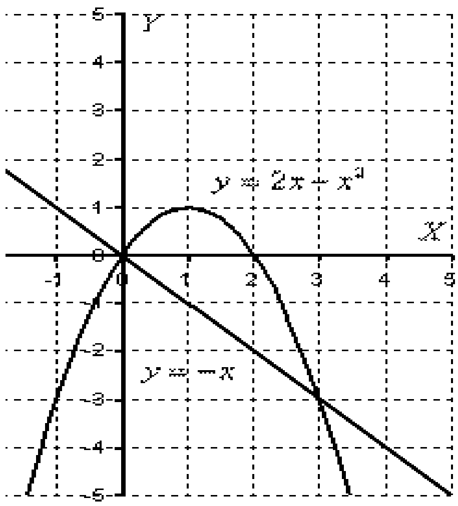


Рисунок 7.4 – Фигура ограниченная линиями

Если на отрезке $[a;b]$ некоторая непрерывная функция $f(x)$ больше либо равна некоторой непрерывной функции $g(x)$, то площадь соответствующей фигуры можно найти по формуле: $S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

Важно, какой график ВЫШЕ (относительно другого графика), а какой – НИЖЕ.

В рассматриваемом примере очевидно, что на отрезке $[0;3]$ парабола располагается выше прямой, а поэтому из $2x-x^2$ необходимо вычесть $-x$

Искомая фигура ограничена параболой $y=2x-x^2$ сверху и прямой $y=-x$ снизу.

$$S=\int_0^3(2x-x^2-(-x))dx=\int_0^3(3x-x^2)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}-0+0=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$$

Ответ: $S=4\frac{1}{2}$ $ед^2$

Пример 4:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $3x^2+4y=0$, $2x+4y+1=0$

Представим уравнения в виде $y=-\frac{3}{4}x^2$, $y=\frac{-2x-1}{4}$ и выполним поточечный чертеж, как показано на рисунке 7.5.

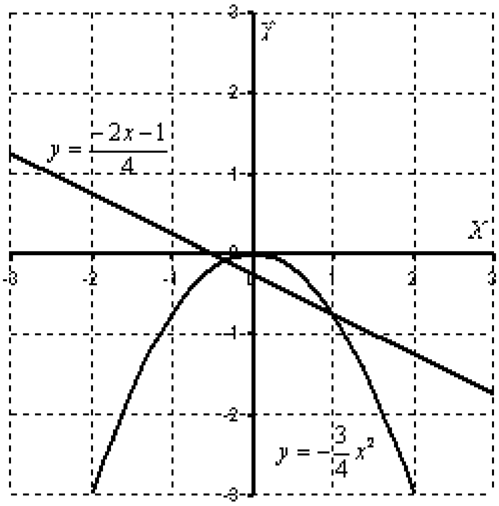


Рисунок 7.5 – Фигура ограниченная линиями

Найдем точки пересечения прямой $y=\frac{-2x-1}{4}$ и параболы $y=-\frac{3}{4}x^2$. Для этого решаем уравнение:

$$\frac{-2x-1}{4}=-\frac{3}{4}x^2$$

$$3x^2=2x+1$$

$$3x^2-2x-1=0$$

$D = 4+12 = 16;\ \sqrt{D} = 4$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{6}$

$x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$

$a = -\frac{1}{3}$.

На отрезке $\left[-\frac{1}{3};1\right] - \frac{3}{4}x^2 \geq \frac{-2x-1}{4}$, по соответствующей формуле:

$$S = \int_{-1/3}^{1}\left(-\frac{3}{4}x^2 - \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right)dx = \int_{-1/3}^{1}\left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}x^2\right)dx = \left(\frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4}\right)\Big|_{-1/3}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4}(x + x^2 - x^3)\Big|_{-1/3}^{1} = \frac{1}{4}\left(1+1-1-\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{5}{27}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{32}{27} = \frac{8}{27}$$

Ответ: $S = \frac{8}{27}$ ед.$^2 \approx 0{,}3$ ед.^{2}

3 Вопросы для самоконтроля:

Что такое определенный интеграл?

Назовите формулу Ньютона – Лейбница.

Как вычислить площадь фигуры?

Всегда ли положительна площадь фигуры?

Для чего необходимо строить чертеж?

4 Задания:

Вариант№1 Даны уравнения линий. Найти площадь фигуры, ограниченной этими линиями:

1) $y = 10x - x^2;\ \ y = 0$;

2) $y = x; y = 1; x = 3; x = 4$;

3) $y=x^2+2;y=x;x=2;x=4$.

Вариант№2 Даны уравнения линий. Найти площадь фигуры, ограниченной этими линиями:

1) $y = x^2 - 10x;\ \ y = 0$;

2) $y = 2x; y = 1; x = 1; x = 2$;

3) $y=x^2-2;y=x$.

Вариант№3 Даны уравнения линий. Найти площадь фигуры, ограниченной этими линиями:

1) $y = 11x - x^2;\ \ y = 0$;

2) $y=x+2;\ y=2;x=3;x=4$;

3) $y=-x^2+2;y=x$.

Вариант№4 Даны уравнения линий. Найти площадь фигуры, ограниченной этими линиями:

1) $y = x^2 - 11x; \quad y = 0$;

2) y=x-1; y=-2;x=3;x=4;

3) $y=x^2$;y=4.

Вариант№5 Даны уравнения линий. Найти площадь фигуры, ограниченной этими линиями:

1) $y = 12x - x^2; \quad y = 0$;

2) y=x+3; y=2;x=4;x=5;

3) $y=x^3$;y=27;y=0.

Вариант№6 Даны уравнения линий. Найти площадь фигуры, ограниченной этими линиями:

1) $y = x^2 - 12x; \quad y = 0$;

2) y=x; y=3;x=3;x=4;

3) $y=x^2$;y=16.

Вариант№7 Даны уравнения линий. Найти площадь фигуры, ограниченной этими линиями:

1) $y = 13x - x^2; \quad y = 0$;

2) y=-x; y=0;x=-3;x=-4;

3) $y=x^2$;y=4+x.

Вариант№8 Даны уравнения линий. Найти площадь фигуры, ограниченной этими линиями:

1) $y = x^2 - 13x; \quad y = 0$;

2) y=-x+2; y=2;x=-3;x=-4;

3) $y=-x^2$;y=-4.

Вариант№9 Даны уравнения линий. Найти площадь фигуры, ограниченной этими линиями:

1) $y = 14x - x^2; \quad y = 0$;

2) y=x+3; y=2;x=2;x=4;

3) $y=x^2+3$;y=x+6.

Вариант№10 Даны уравнения линий. Найти площадь фигуры, ограниченной этими линиями:

1) $y = x^2 - 14x; \quad y = 0$;

2) $y=-x^2$;y=-9;

3) y=x; y=0;x=3;x=4.

1.8 Практическая работа №8

Тема: Вычисление объемов тел.

Цель работы: научиться вычислять объемы тел вращения вокруг оси x и y

Дисциплина: математика

Курс: 2

Специальность: 270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”

Литература:

Дадаян А. А. Математика: Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 10§15

1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

Если криволинейная трапеция ограниченная линией y=f(x)

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(y)dy$$

$y = 2x - x^2$ $y = 0$ OX

XOY

$y = 2x - x^2$ $y = 0$

$y = 0$ OX

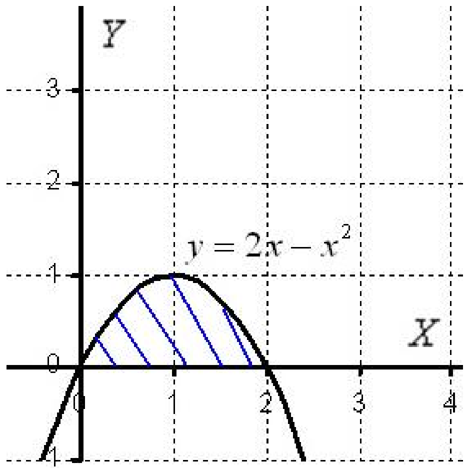


Рисунок 8.1 – Фигура ограниченная линиями

Искомая плоская фигура заштрихована синим цветом, именно она и вращается вокруг оси OX.

Объем тела вращения можно вычислить по формуле 1.

Плоская фигура ограничена графиком параболы $f(x) = 2x - x^2$ сверху. Это и есть та функция, которая подразумевается в формуле.

В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси OX. Это ничего не меняет – функция в формуле возводится в квадрат: $f^2(x)$, таким образом объем тела вращения всегда неотрицателен.

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:
$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0\right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15}\, ед^3. \approx 3{,}35\, ед^3.$

В ответе нужно обязательно указать размерность – кубические единицы $ед^3$.

Пример 2

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = 2x + 1$, $y = x + 4$, $x = 0$ и $x = 1$

Решение: Изобразим на чертеже плоскую фигуру, ограниченную линиями $y = 2x + 1$, $y = x + 4$, $x = 0$, $x = 1$, не забывая при этом, что уравнение $x = 0$ задает ось OY как показано на рисунке 8.2.

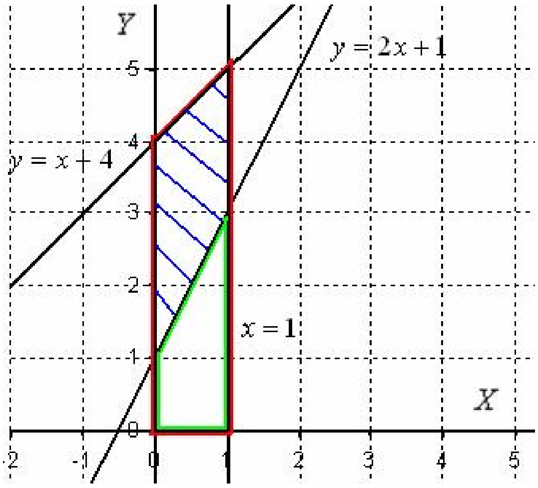


Рисунок 8.2 – Фигура ограниченная линиями

Искомая фигура заштрихована синим цветом. Объем тела вращения вычислим как разность объемов тел.

Сначала рассмотрим фигуру, которая обведена красным цветом. При её вращении вокруг оси OX получается усеченный конус. Обозначим объем этого усеченного конуса через V_1.

Рассмотрим фигуру, которая обведена зеленым цветом. Если вращать данную фигуру вокруг оси OX, то получится тоже усеченный конус, только чуть поменьше. Обозначим его объем через V_2.

И, очевидно, разность объемов $V = V_1 - V_2$ – объем нашей фигуры.

Используем формулу 1.
1) Фигура, обведенная красным цветом ограничена сверху прямой $y = x + 4$, поэтому:

$$V_1 = \pi\int_0^1 (x+4)^2 dx = \pi\int_0^1 (x^2 + 8x + 16)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} + 4 + 16\right) = \frac{61\pi}{3}$$

2) Фигура, обведенная зеленым цветом ограничена сверху прямой $y = 2x + 1$, поэтому:

$$V_1 = \pi\int_0^1 (2x+1)^2 dx = \pi\int_0^1 (4x^2 + 4x + 1)dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{4}{3} + 2 + 1\right) = \frac{13\pi}{3}$$

3) Объем искомого тела вращения: $V = V_1 - V_2 = \frac{61\pi}{3} - \frac{13\pi}{3} = \frac{48\pi}{3} = 16\pi$

Ответ: $V = 16\pi\, ед.^3 \approx 50{,}3\, ед^3.$

Пример 3

Дана плоская фигура, ограниченная линиями $y = 3 + \sqrt{x}$, $y = 3 - \sqrt{x}$, $y = x + 1$

как показано на рисунке 8.3.

Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями, вокруг оси OY .

Вычислим объем тела, образованного вращением данной фигуры, вокруг оси OY .

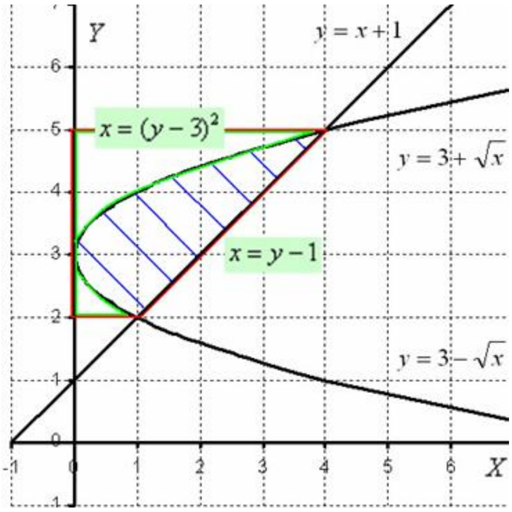


Рисунок 8.3 – Фигура ограниченная линиями

Итак, фигура, заштрихованная синим цветом, вращается вокруг оси OY . В результате получается «зависшая бабочка», которая вертится вокруг своей оси.

Для нахождения объема тела вращения будем интегрировать по оси OY . Сначала нужно перейти к обратным функциям. Очевидно, что объем тела вращения, следует найти как разность объемов.

Вращаем фигуру, обведенную красным цветом, вокруг оси OY , в результате получается усеченный конус. Обозначим этот объем через V_1.

Вращаем фигуру, обведенную зеленым цветом, вокруг оси OY и обозначаем через V_2 объем полученного тела вращения.

Объем нашей бабочки равен разности объемов $V = V_1 - V_2$.

Используем формулу 2 для нахождения объема тела вращения:

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_2^5 (y-1)^2 dy - \pi\int_2^5 ((y-3)^2)^2 dy = \pi\int_2^5 (y-1)^2 dy - \pi\int_2^5 (y-3)^4 dy =$$

$$= \frac{\pi}{3}(y-1)^3\Big|_2^5 - \frac{\pi}{5}(y-3)^5\Big|_2^5 = \frac{\pi}{3}(64-1) - \frac{\pi}{5}(32-(-1)) = 21\pi - \frac{33\pi}{5} = \frac{72\pi}{5}$$

Ответ: $V = \frac{72\pi}{5}$ $ед.^3 \approx 45{,}24\, ед^3.$

3 Вопросы для самоконтроля:

По какой формуле вычисляется объем тела вращения вокруг оси x?

По какой формуле вычисляется объем тела вращения вокруг оси y?

Как найти точки пересечения линий?

4 Задания:

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В 1 задании ось вращения Ох, в 2 задании ось вращения Оу.

Вариант 1:
1)$y= - x^2+5x-6$, $y=0$;
2)$y=x^2$, $x=2$, $y=0$.

Вариант 2:
1) $y=3\sin x$, $y=\sin x$, 0

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В 1 задании ось вращения Ох, в 2 задании ось вращения Оу.

Вариант 3:
1) $2x-x^2-y=0$, $2x^2-4x+y=0$;
2)$y=$

Вариант 4:
1) $y=5\cos x$, $y=\cos x$,

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В 1 задании ось вращения Ох, в 2 задании ось вращения Оу.

Вариант 5:
1) $y=x^3$, $y=$

Вариант 6:
1)$y=-2x^2-x^2$, $y=-x+2$, $x=0$;
2)$y=x^3$, $y=x^2$.

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В 1 задании ось вращения Ох, в 2 задании ось вращения Оу.

Вариант 7:
1)$y=2x-x^2$, $y=-x+2$;
2)$y=x^2-2x+1$, $x=2$, $y=0$.

Вариант 8:
1)$y=x^2$, $y^2-x=0$;
2) $y=x^3$, $y=x$.

Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций. В 1 задании ось вращения Ох, в 2 задании ось вращения Оу.

Вариант 9:
1)$y=-1-x^2$,$x=0$;
2) $y=(x-1)^2$, $y=0$, $x=0$, $x=2$.

Вариант 10:
1)$y=x^2$,$y=1$, $x=2$;
2) $y=x^3$, $y=x^2$.

1.9 Практическая работа №9

Тема: Решение дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными.

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения с разделяющимися и разделенными переменными, находить общее и частное решение, делать проверку.

Дисциплина: математика

Курс: 2

Специальность: 270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”

Литература: Дадаян А. А. Математика: Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 11§1,2

1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

Дифференциальное уравнение первого порядка, содержит:

1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции: y'.

В некоторых случаях в уравнении первого порядка может отсутствовать «икс» или (и) «игрек» – важно чтобы в дифференциальном уравнении была первая производная y', и не было производных высших порядков – y'', y''' и выше.

Что значит решить дифференциальное уравнение**?** Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество функций $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется общим решением дифференциального уравнения.

2 Типовые задания с подробными решениями:

Пример 1:

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$.

Итак, на первой этапе переписываем производную в нужном нам виде:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$$

На втором этапе всегда смотрим, нельзя ли разделить переменные? Что значит разделить переменные?

В рассматриваемом примере переменные легко разделяются по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – интегрирование дифференциального уравнения

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

интегралы в данном случае табличные: $\ln|y| = \ln|x| + C$

Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется общим интегралом дифференциального уравнения. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

Теперь нужно попробовать найти общее решение, то есть попытаться представить функцию в явном виде.

Когда в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу почти всегда целесообразно записать тоже под логарифмом.

То есть, вместо записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Здесь $\ln|C|$ – это такая же полноценная константа, как и C. Зачем это нужно? А для того, чтобы легче было выразить «игрек». Используем школьное свойство логарифмов: $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. В данном случае: $\ln|y| = \ln|Cx|$

Теперь логарифмы и модули можно убрать с обеих частей: $y = Cx$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Пример 2:

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

По условию требуется найти частное решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Переписываем производную в нужном виде: $\frac{dy}{dx} = -2y$ $\qquad \frac{dy}{y} = -2dx$

Интегрируем уравнение: $\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$

$\ln|y| = -2x + C^*$

Теперь пробуем общий интеграл преобразовать в общее решение (выразить «игрек» в явном виде). Вспоминаем: $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$. В данном случае:

$y = e^{-2x+C^*}$

Используя свойство степеней, перепишем функцию следующим образом:
$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$

Если C^* – это константа, то e^{C^*} – тоже некоторая константа, которую обозначим через букву C:
$y = Ce^{-2x}$

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$. На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$. Это тоже просто.

В чём состоит задача? Необходимо подобрать такое значение константы C, чтобы выполнялось заданное начальное условие $y(0) = 2$.

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:
$2 = Ce^{-2\cdot 0}$
$2 = Ce^{0}$
$2 = C \cdot 1$
То есть, $C = 2$

Стандартная версия оформления:
$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^{0} = C = 2$

В общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:
$y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Выполним проверку. Проверка частного решение включает в себя два этапа.

Сначала необходимо проверить, а действительно ли найденное частное решение $y = 2e^{-2x}$ удовлетворяет начальному условию $y(0) = 2$? Вместо «икса» подставляем ноль и смотрим, что получится:
$y(0) = 2e^{-2\cdot 0} = 2e^{0} = 2 \cdot 1 = 2$ – да, действительно получена двойка, значит, начальное условие выполняется.

Второй этап уже знаком. Берём полученное частное решение $y = 2e^{-2x}$ и находим производную:
$y' = (2e^{-2x})' = 2(e^{-2x})' = 2e^{-2x} \cdot (-2x)' = -4e^{-2x}$

Подставляем $y = 2e^{-2x}$ и $y' = -4e^{-2x}$ в исходное уравнение $y' = -2y$:

$-4e^{-2x} = -2 \cdot 2e^{-2x}$
$-4e^{-2x} = -4e^{-2x}$ – получено верное равенство.

Вывод: частное решение найдено правильно.

3 Вопросы для самоконтроля:

Какое уравнение называется дифференциальным?

Дифференциальное уравнение первого порядка?

Что называется решением дифференциального уравнения?

Какие решения дифференциального уравнения называются общими и частными?

Как решаются дифференциального уравнения с разделяющимися уравнениями?

4 Задания:

Вариант 1

Найти общее решение ДУ:

а) $e^x dx = 4^y dy$;

б) $y' + 4y - 2 = 0$;

в) $\frac{dy}{2y} - dx = 0$;

г) $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

Найти общее и частное решение ДУ $4xydx = \left(x^2 + 1\right)dy$

$y = 4, x = 1$

Вариант 2

Найти общее решение ДУ:

а) $\frac{dx}{x} = \sqrt{y}dy$;

б) $y' = 4y - 2$;

в) $\sqrt{x}dy - \sqrt{y}dx = 0$;

г) $y' = 2\sqrt{y}$.

Найти общее и частное решение ДУ

$\left(x^2 + 1\right)dy = xydx$

$y = 2, x = \sqrt{3}$

Вариант 3

Найти общее решение ДУ:

а) $y^2 dx = e^x dy$;

б) $y' = \sin x$;

в) $\sqrt{x}dy - \sqrt{y}dx = 0$;

г) $y' = 2\sqrt{y}$.

Найти общее и частное решение ДУ

$\frac{dy}{x} = \frac{dx}{y^2}$

$y = 2, x = 0$

Вариант 4

Найти общее решение ДУ:

а) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$;

б) $2y' = y$;

в) $e^x dx = 4^y dy$;

г) $y' + 4y - 2 = 0$.

Найти общее и частное решение ДУ

$xdy = ydx$

$y = 6, x = 2$

Вариант 5

Найти общее решение ДУ:

а) $\sqrt{x}dy - \sqrt{y}dx = 0$;

б) $y' = 2\sqrt{y}$;

в) $e^x dx = 4^y dy$;

г) $y' + 4y - 2 = 0$.

Найти общее и частное решение ДУ

Вариант 6

Найти общее решение ДУ:

а) $\frac{dy}{2y} - dx = 0$;

б) $y' = \sqrt{1 - y^2}$;

в) $\frac{dx}{x} = \sqrt{y}dy$;

г) $y' = 4y - 2$.

$ydy = xdx$

$y = 4, x = -2$

Вариант 7

Найти общее решение ДУ:

а) $e^x dx = 4^y dy$;

б) $y' + 4y - 2 = 0$;

в) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$;

г) $2y' = y$.

Найти общее и частное решение ДУ

$4xydx = (x^2 + 1)dy$

$y = 4, x = 1$

Вариант 9

Найти общее решение ДУ:

а) $y^2 dx = e^x dy$;

б) $y' = \sin x$;

в) $\frac{dx}{x} = \sqrt{y} dy$;

г) $y' = 4y - 2$.

Найти общее и частное решение ДУ

$\frac{dy}{x} = \frac{dx}{y^2}$

$y = 2, x = 0$

Найти общее и частное решение ДУ

$\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$

$y = 4, x = 0$

Вариант 8

Найти общее решение ДУ:

а) $\frac{dx}{x} = \sqrt{y} dy$;

б) $y' = 4y - 2$;

в) $e^x dx = 4^y dy$;

г) $y' + 4y - 2 = 0$.

Найти общее и частное решение ДУ

$(x^2 + 1)dy = xydx$

$y = 2, x = \sqrt{3}$

Вариант 10

Найти общее решение ДУ:

а) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$;

б) $2y' = y$;

в) $y^2 dx = e^x dy$;

г) $y' = x$.

Найти общее и частное решение ДУ

$xdy = ydx$

$y = 6, x = 2$

1.10 Практическая работа №10

Тема: Решение неполных дифференциальных уравнений второго порядка.

Цель работы:

Дисциплина: математика

Курс: 2

Специальность: 270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”

Литература:

Дадаян А. А. Математика: Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 11§4,5

1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

Уравнение, содержащее производные не выше второго порядка, называется дифференциальным уравнением второго порядка.

В общем виде уравнение второго порядка записывается следующим образом:

$y'' = x^2 - 2x$

$y'' = f(x)$

$$y' = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$$

$y' = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$ C_1

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$, где $C_1, C_2 - const$

$$y' = \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2 \right)' = \frac{1}{12} \cdot 4x^3 - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + C_1 + 0 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1$$

$$y'' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1 \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x + 0 = x^2 - 2x$$

$y'' = x^2 - 2x$

$y'' = \sqrt{x} - \sin 2x$

$y'' = f(x)$

$$y' = \int (x^{\frac{1}{2}} - \sin 2x)dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x + C_1$$

$$y=\int\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\cos 2x+C_1\right)dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C_1x+C_2=\frac{4}{15}\sqrt{x^5}+\frac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2$$

Ответ**:** общее решение*:* $y=\frac{4}{15}\sqrt{x^5}+\frac{1}{4}\sin 2x+C_1x+C_2,\ \textit{где}\ \ C_1,C_2-const$

В дифференциальном уравнении в явном виде отсутствует функция y

Пример 3:

Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+\frac{y'}{x+1}=9(x+1)$.

Решение**:** В данном уравнении второго порядка в явном виде не участвует переменная y. Заменим первую производную y' новой функцией z, которая зависит от «икс»: $y'=z$

Если $y'=z$, то $y''=z'$

Цель проведённой замены очевидна – понизить степень уравнения: $z'+\frac{z}{x+1}=9(x+1)$

Решим вспомогательное уравнение: $z'+\frac{z}{x+1}=0$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{z}{x+1}$$

$$\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|z|=-\ln|x+1|+\ln|C|$$

$$\ln|z|=\ln\left|\frac{C}{x+1}\right|$$

Общее решение вспомогательного уравнения: $z=\frac{\widetilde{C}}{x+1},\ \textit{где}\ \ \widetilde{C}=const$

Варьируя постоянную $\widetilde{C}$, в неоднородном уравнении $z'+\frac{z}{x+1}=9(x+1)$ проведем замену:

$$z=\frac{u}{x+1}\Rightarrow z'=\frac{u'(x+1)-u}{(x+1)^2}=\frac{u'}{x+1}-\frac{u}{(x+1)^2}$$

$$\frac{u'}{x+1}-\frac{u}{(x+1)^2}+\frac{u}{(x+1)^2}=9(x+1)$$

Пара слагаемых в левой части сокращается, значит, мы на верном пути: $\frac{u'}{x+1}=9(x+1)$

Разделяем переменные и интегрируем: $\frac{du}{dx}=9(x+1)^2$

$$\int du=9\int(x+1)^2dx$$

$$u=9\int(x+1)^2dx=9\cdot\frac{1}{3}(x+1)^3+C_1=3(x+1)^3+C_1$$

Таким образом: $z=\frac{u}{x+1}=\frac{3(x+1)^3+C_1}{x+1}=3(x+1)^2+\frac{C_1}{x+1}$

Итак, функция z найдена. Вспоминаем, что в начале задания была выполнена замена $y'=z$, следовательно, нужно провести обратную замену $z=y'$:

$$y'=3(x+1)^2+\frac{C_1}{x+1}$$

Общее решение восстанавливаем интегрированием: $y=\int\left(3(x+1)^2+\frac{C_1}{x+1}\right)dx=(x+1)^3+C_1\ln|x+1|+C_2$

Ответ: Общее решение: $y=(x+1)^3+C_1\ln|x+1|+C_2$, где $C_1, C_2-const$

3 Вопросы для самоконтроля:

Какое уравнение называется дифференциальным?

Дифференциальное уравнение второго порядка?

Что называется решением дифференциального уравнения?

Какие решения дифференциального уравнения называются общими и частными?

Как решаются неполные дифференциального уравнения второго порядка?

4 Задания:

Вариант №1

Найти общие решения уравнений:

-

Найти частное решение уравнения:

-

2 Основы дискретной математики

2.1 Практическая работа №11

Тема: Основы дискретной математики.
Цель работы:
Дисциплина: математика
Курс: 2
Специальность: 270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”
Литература:
Дадаян А. А. Математика:Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 1§1, 2

1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент **x** принадлежит множеству **X**, то записывают $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ($\in$ — принадлежит).
Если множество А является частью множества В, то записывают $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ ($\subset$ — содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Например, перечислением заданы следующие множества:

1) $A=\{1,2,3,5,7\}$ — множество чисел;
2) $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ — множество некоторых элементов $x_1,x_2,...,x_n$;
3) $N=\{1,2,...,n\}$ — множество натуральных чисел;
4) $Z=\{0,\pm1,\pm2,...,\pm n\}$ — множество целых чисел.

Два множества А и В равны (А=В), если они состоят из одних и тех же элементов.
Объединением (суммой) множеств А и В называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств. Пересечением (произведением) множеств А и В называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству А, так и множеству В. Разностью множеств А и В называется множество АВ, элементы которого принадлежат множеству А, но не принадлежат множеству В. Симметричной разностью множеств А и В называется множество $A \Delta B$, являющееся объединением разностей множеств АВ и ВА, то есть $A \Delta B = (AB) \cup (BA)$.
2 Типовые задания с подробными решениями

Например, если $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,1,4,2\}$ то А=В.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то A ∪ B = {1,2,3,4,5,6}

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то A ∩ B = {2,4}

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то AB = {1,2}

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, то A Δ B = {1,2} ∪ {5,6} = {1,2,5,6}

3 Вопросы для самоконтроля:

1) Что такое множества?

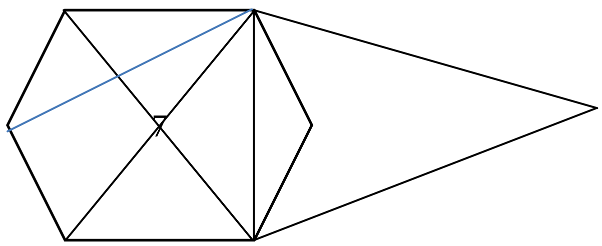
2) Какие действия над множествами Вы знаете?

3) Что такое упорядоченная пара?

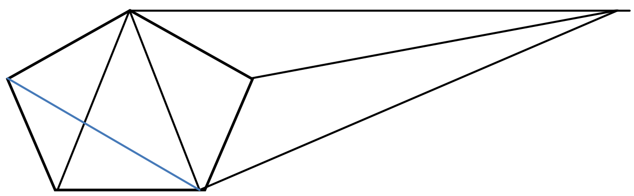
4 Задания:

Вариант1

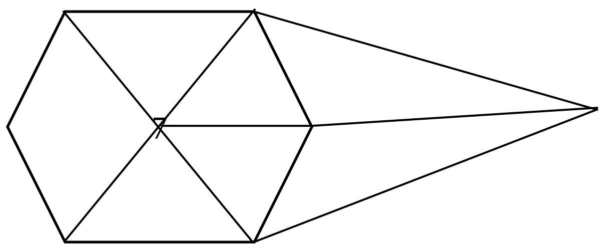
1.Даны множества: A



Определить последовательность
1) 1-2-3-4-5-7-2
2) 1-2-7-5-8-3-7-6-1
3) 1-2-7-5-8-3
4) 2-3-8-5-7-2

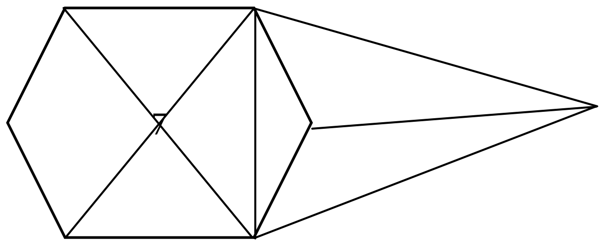


Определить последовательность
1) 2-5-3-4-6-1
2) 6-4-3-5-2-1-6
3) 1-2-3-4-5
4) 1-2-5-4-6-1



Определить последовательность
1) 1-2-3-8-5-4-3
2) 7-5-6-1-2-3-4-5-8-4-7
3) 1-2-3-8-4-7
4) 2-3-8-4-7-2

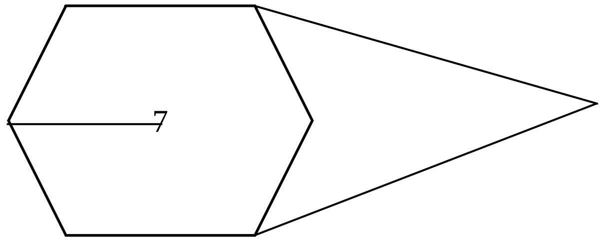
1.Даны множества: А



Определить последовательность

1) 1-7-5-3-7-6
2) 1-6-5-4-3-5-7-2-1
3) 1-2-3-8-5-4
4) 1-2-3-5-6-1

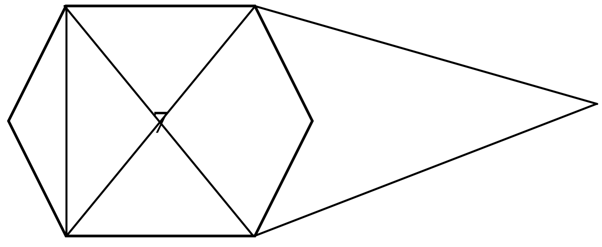
3. Чему равна степень вершины 4



Определить последовательность

1) 1-2-7-3-4-5-7-6
2) 1-6-7-3-4-5-7-2-1
3) 1-2-3-8-5-6
4) 3-4-5-6-1-2-3

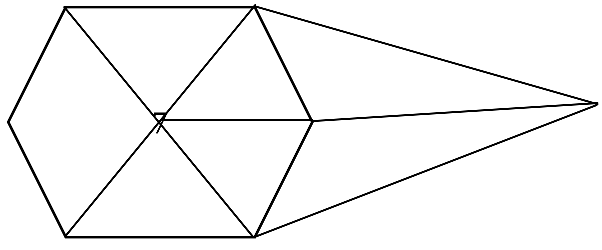
3. Чему равна степень вершины 7



Определить последовательность

1) 1-2-6-5-4-3-2
2) 7-2-1-6-5-4-3-7
3) 1-2-3-8-5-6-7
4) 5-4-3-7-5

3. Чему равна степень вершины 2



Определить последовательность

1) 1-2-3-8-5-4-3
2) 7-5-6-1-2-3-4-5-8-4-7
3) 1-2-3-8-4-7
4) 2-3-8-4-7-2

3. Чему равна степень вершины 5

3 Основы теории вероятностей и математической статистики

3.1 Практическая работа №12

Тема: Вычисление вероятностей простых и сложных событий.
Цель работы: научиться решать примеры вычисления вероятности события
Дисциплина: математика
Курс: 2
Специальность: 270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”
Литература: Дадаян А. А. Математика: Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 15§6,7,8,9,10,11

1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

Классическое определение вероятности случайного события.

Вероятность события A равна отношению числа благоприятных событию A исходов опыта к общему числу исходов опыта.

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

где m - число благоприятных исходов опыта;
n - общее число исходов опыта.

Исход опыта называется благоприятным для события A, если при этом исходе опыта появилось событие A. Например, если событие A - появление карты красной масти, то появление туза бубен – исход, благоприятный событию A.

Замечание. Классическое определение вероятности применимо при двух условиях:

1) все исходы опыта должны быть равновероятными;
2) опыт должен иметь конечное число исходов.

На практике бывает сложно доказать, что события равновероятные: например, при произведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять такие факторы как несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д., кроме того, существуют опыты с бесконечным числом исходов.

Основные правила вычисления вероятностей сложных событий:

Ниже приведены основные правила, позволяющие определить вероятность появления сложного события на основании известных вероятностей составляющих его более простых событий.

1. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(E)=1, \qquad (1)$$

2. Вероятность объединения (суммы) несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) +, \ldots, + P(A_n), \qquad (2)$$

Эти два равенства являются аксиомами теории вероятностей, т. е. принимаются в качестве исходных, но требующих доказательства свойств вероятностей. На их основе строится вся теория вероятностей.

Все остальные, приведенные ниже без доказательств формулы могут быть выведены из принятых аксиом.

3. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\varnothing) = 0, \qquad (3)$$

4. Вероятность события, противоположного событию А, равна

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)., \qquad (4)$$

5. *Теорема сложения вероятностей*. Вероятность объединения произвольных событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB), \qquad (5)$$

Для несовместных событий $P(AB) = 0$

6. Условная вероятность. Если требуется найти вероятность события *B* при условии, что произошло некоторое другое событие *A*, то такую ситуацию характеризуют с помощью условной вероятности $P(B \mid A)$. Условная вероятность равна отношению вероятности произведения событий *A* и *B* к вероятности события *A*:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad (6)$$

В тех случаях, когда события *A* и *B* несовместны, $P(AB) = 0$ и соответственно $P(B|A) = 0$.

7. Определение условной вероятности в виде (4.7) дает возможность записать следующую формулу для вычисления вероятности произведения событий (*теорема умножения вероятностей*)

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B), \qquad (7)$$

8. Поскольку вероятность события *A* (или *B*) для независимых событий по определению не изменяется при появлении другого события, то условная вероятность $P(A|B)$ совпадает с вероятностью события *A*, а условная вероятность

$P(B|A)$ — с $P(B)$. Вероятности $P(A)$ и $P(B)$ в отличие от условных вероятностей называются безусловными.

$$P(A|B) = P(A),\quad P(B|A) = P(B), \tag{8}$$

Теорема умножения вероятностей для независимых событий записывается следующим образом:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n), \tag{9}$$

2 Типовые задания с подробными решениями:

Примеры.

1) Вероятность выпадения 5 очков на грани кубика равна

$$P(A) = \frac{12}{15}$$

$$\frac{5}{15}$$

При каких двух условиях применимо классическое определение вероятности?

4 Задания:

1 Вариант

Из урны, в которой находятся 4 белых, 7 зеленых, 8 синих шара вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется синим?

Найти вероятность того, что наугад взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 3, либо тому и другому одновременно.

2 Вариант

Из урны, в которой находятся 3 белых, 2 зеленых, 9 синих шара вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шарика окажутся синими?

В урне находятся 10 белых и 5 синих шаров. Вынимают один за другим два шара. Найти вероятность того. что оба шара окажутся белыми?

3 Вариант

Из урны, в которой находятся 5 белых, 6 зеленых, 7 синих шара вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется зеленым?

В первой урне находятся 5 белых и 4 розовых шара, а во второй 6 белых и 3 розовых шара. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся розовыми?

4 Вариант

Из урны, в которой находятся 6 белых, 2 зеленых, 7 синих шара вынимают два шара. Найти вероятность того, что шары окажутся зелеными?

На отдельных карточках написаны буквы а, о, и, н, т, с. После перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Найти вероятность того. что из этих букв составится слово “нота”.

5 Вариант

Из урны, в которой находятся 2 белых, 17 зеленых, 3 синих шара вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется синим?

Найти вероятность того, что наугад взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 7, либо тому и другому одновременно.

6 Вариант

Из урны, в которой находятся 23 белых, 20 зеленых, 19 синих шара вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шарика окажутся белыми?

В урне находятся 11 белых и 15 синих шаров. Вынимают один за другим два шара. Найти вероятность того. что оба шара окажутся синими?

7 Вариант

Из урны, в которой находятся 9 белых, 4 зеленых, 7 синих шара вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется белым?

В первой урне находятся 8 белых и 4 красных шара, а во второй 6 белых и 5 красных шара. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся красными?

8 Вариант

Из урны, в которой находятся 16 белых,1 2 зеленых, 7 синих шара вынимают два шара. Найти вероятность того, что шары окажутся зелеными?

На отдельных карточках написаны буквы а, о, и, н, к, с. После перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Найти вероятность того. что из этих букв составится слово “кино”.

9 Вариант

Из урны, в которой находятся 8 белых, 7 зеленых, 5 синих шара вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется синим?

Найти вероятность того, что наугад взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 4, либо тому и другому одновременно.

3.2 Практическая работа №13 и14

Тема: Распределение и характеристики дискретной случайной величины.

Цель работы: научиться вычислять математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины

Дисциплина: математика

Курс: 2

Специальность: 270802 “Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”

Литература: Дадаян А. А. Математика: Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 15§13,14

1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.

Заданное соответствие между возможными значениями ДСВХ и их вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы 13.1 содержит возможные значения, а вторая - их вероятности.

Таблица 13.1 – Ряд распределения

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X=x_1$, $X=x_2$, …, $X=x_n$ - образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице.

Математическое ожидание ДСВХ равно сумме произведений всех ее возможных значений на их вероятности

$M(x)=x_1p_1+ x_2p_{2+\dots}\ x_np_n$, (1)

где M(x) - математическое ожидание;

x_1, x_2, x_n – возможные значения;

p_1, p_2, p_n - вероятности.

Дисперсией дискретной случайной величины (D(X)) называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2., \quad (2)$$

где M(x) - математическое ожидание;

D(X) – дисперсия дискретной случайной величины.

2 Типовые задания с подробными решениями:

Пример1. В партии из восьми деталей пять стандартных, наудачу взяты четыре детали. Построить ряд распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Пусть *X*—число стандартных деталей среди четырех отобранных. Оно может принять следующие четыре значения: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$. Вычислим вероятность появления каждого из них:

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 C_3^3}{C_8^4} = \frac{1}{14};$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 C_3^2}{C_8^4} = \frac{6}{14};$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3 C_3^1}{C_8^4} = \frac{6}{14};$$

$$P(X=4) = \frac{C_5^4 C_3^0}{C_8^4} = \frac{1}{14}.$$

Проверим вычисления. Складывая полученные вероятности, получим: 1/14+ 6/14+ 6/14 + 1/14=1. Искомый ряд распределения данной дискретной случайной величины x имеет вид:

X	1	2	3	4
p	1/14	6/14	6/14	1/14

Найдем M(X) для ДСВХ из рассмотренной задачи:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{14} + 2 \cdot \frac{6}{14} + 3 \cdot \frac{6}{14} + 4 \cdot \frac{1}{14} = 2{,}5.$$

3 Вопросы для самоконтроля:

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины?

Что такое ряд распределения?

Для вычисления математического ожидания используют формулу?

Для вычисления дисперсии используют формулу?

4 Задания:

1 Вариант

Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна 0, 3. Составить закон распределения числа библиотек, которые он хочет посетить, если в городе четыре библиотеки.

Найти дисперсию случайной величины:

x	-2	-1	1	2
p	0,4	0,1	0,25	0,25

2 Вариант

Найти дисперсию случайной величины:

x	-3	-2	0	1
p	0,3	0,2	0,25	0,25

Составить закон распределения числа попаданий в цель при пяти выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6.

3 Вариант

Найти дисперсию случайной величины:

x	-1	0	1	2
p	0,25	0,1	0,4	0,25

Составить закон распределения числа попаданий в цель при шести выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5.

4 Вариант

Найти дисперсию случайной величины:

x	-3	0	1	2
p	0,3	0,2	0,3	0,2

Составить закон распределения числа попаданий в цель при пяти выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7.

5 Вариант

Найти дисперсию случайной величины:

x	-4	-3	-1	0
p	0,1	0,4	0,25	0,25

Составить закон распределения числа попаданий в цель при пяти выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8.

6 Вариант

Найти дисперсию случайной величины:

x	-2	-1	1	2
p	0,3	0,2	0,4	0,1

Составить закон распределения числа попаданий в цель при пяти выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,1.

7 Вариант

Найти дисперсию случайной величины:

x	-4	0	1	3
p	0,25	0,4	0,1	0,25

Составить закон распределения числа попаданий в цель при четырех выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,2.

8 Вариант

Найти дисперсию случайной величины:

x	-3	-2	1	2
p	0,3	0,2	0,2	0,3

Составить закон распределения числа попаданий в цель при пяти выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,65.

9 Вариант

Найти дисперсию случайной величины:

x	-2	-1	1	2
p	0,1	0,4	0,1	0,4

Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более семи выстрелов. Составить закон распределения, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0, 55.

10 Вариант

Найти дисперсию случайной величины:

x	-9	-11	11	2
p	0,1	0,4	0,1	0,4

Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более восьми выстрелов. Составить закон распределения, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0, 7.

11 Вариант

Найти дисперсию случайной величины:

x	-8	-10	11	2
p	0,2	0,25	0,25	0,3

Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более восьми выстрелов. Составить закон распределения, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0, 7.

12 Вариант

Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна 0, 1. Составить закон распределения числа библиотек, которые он хочет посетить, если в городе пять библиотек.

Найти дисперсию случайной величины:

x	-2	-10	11	2
p	0,4	0,1	0,25	0,25

13 Вариант

Найти дисперсию случайной величины:

x	-4	-3	1	3
p	0,3	0,2	0,25	0,25

Составить закон распределения числа попаданий в цель при пяти выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5.

3.3 Практическая работа №15

Тема: Первичная обработка статистических данных.

Цель работы:

Дисциплина: математика

Курс: 2

Специальность: 270802“Строительство и эксплуатация зданий и сооружений”

Литература:

Дадаян А. А. Математика: Учебник.-М ФОРУМ:ИНФРА-М,2005.-552с. Глава 15§14

1 Основные теоретические сведения, справочный материал.

Задачи математической статистики.

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных — результатов наблюдений.

Первая задача математической статистики—указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики—разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования.

1. Способы сбора статистических данных.

Генеральная и выборочная совокупности.

Генеральной совокупностью называют совокупность всех мысленно возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения с целью получения конкретных значений случайной величины, или совокупность результатов всех мыслимых наблюдений, проводимых в неизменных условиях над одной из случайных величин, связанных с данным видом объектов.

Выборочной совокупностью называют часть отобранных объектов из генеральной совокупности.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отобрано для обследования 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки n =100.

Число объектов генеральной совокупности N значительно превосходит объем выборки n .

Способы выборки.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

На практике применяются различные способы отбора. Принципиально эти способы можно подразделить на два вида:

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части.

2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности и после обследования не возвращают (бесповторный отбор) или возвращают (повторный отбор) в генеральную совокупность.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части. Например, если детали изготовляют на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности деталей, произведенных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности.

Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности. Например, если продукция изготовляется на нескольких машинах, среди которых есть более и менее изношенные, то здесь типический отбор целесообразен.

Механическим называют отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект. Например, если нужно отобрать 20% изготовленных станком деталей, то отбирают каждую пятую деталь; если требуется отобрать 5% деталей, то отбирают каждую двадцатую деталь, и так далее.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию.

3.Способы группировки статистических данных. Вариационные ряды.

Дискретный вариационный ряд.

Обычно полученные наблюдаемые данные представляют собой множество расположенных в беспорядке чисел. Просматривая это множество чисел, трудно выявить какую-либо закономерность их варьирования (изменения). Для изучения закономерностей варьирования значений случайной величины опытные данные подвергают обработке.

Интервальный вариационный ряд.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная совокупность интервалов варьирования значений случайной величины с соответствующими частотами или частностями попаданий в каждый из них значений величины.

2 Типовые задания с подробными решениями

Построение интервального вариационного ряда рассмотрим на примере.

При измерении диаметра валиков после шлифовки получены следующие результаты:

6,75; 6,77; 6,77; 6,73; 6,76; 6,74; 6,70; 6,75; 6,71; 6,72; 6,77; 6,79; 6,71; 6,78; 6,73; 6,70; 6,73; 6,77; 6,75; 6,74; 6,71; 6,70; 6,78; 6,76; 6,81; 6,69; 6,80; 6,80; 6,77; 6,68; 6,74; 6,70; 6,70; 6,74; 6,77; 6,83; 6,76; 6,76; 6,82; 6,77; 6,71; 6,74; 6,77; 6,75; 6,74; 6,75; 6,77; 6,72; 6,74; 6,80; 6,75; 6,80; 6,72; 6,78; 6,70; 6,75; 6,78; 6,78; 6,76; 6,77; 6,74; 6,74; 6,77; 6,73; 6,74; 6,77; 6.74; 6,75; 6,74; 6,76; 6,76; 6,74; 6,74; 6,74; 6,74; 6,76; 6,74; 6,72; 6,80; 6,76; 6,78; 6,73; 6,70; 6,76; 6,76; 6,77; 6,75; 6,78; 6,72; 6,76; 6,78; 6,68; 6,75; 6,73; 6,82; 6,73; 6,80; 6,81; 6,71; 6,82; 6,77; 6,80; 6,80; 6,70; 6,70; 6,82; 6,72; 6,69; 6,73; 6,76; 6,74; 6,77; 6,72; 6,76; 6,78; 6,78; 6,73; 6,76; 6,80; 6,76; 6,72; 6,76; 6,76; 6,70; 6,73; 6,75; 6,77; 6,77; 6,70; 6,81; 6,74; 6,73; 6,77; 6,74; 6,78; 6,69; 6,74; 6,71; 6,76; 6,76; 6,77; 6,70; 6,81; 6,74; 6,74; 6,77; 6,75; 6,80; 6,74; 6,76; 6,77; 6,77; 6,81; 6,75; 6,78; 6,73; 6,76; 6,76; 6,76; 6,77; 6,76; 6,80; 6,77; 6,74; 6,77; 6,72; 6,75; 6,76; 6,77; 6,81; 6,76; 6,76; 6,76; 6,80; 6,74; 6,80; 6,74; 6,73; 6,75; 6,77; 6,74; 6,76; 6,77; 6,77; 6,75; 6,76; 6,74; 6,82; 6,76; 6,73; 6,74; 6,75; 6,76; 6,72; 6,78; 6,72; 6,76; 6,77; 6,75; 6,78.

Просматривая результаты наблюдений, находим, что наибольшим значением случайной величины $x_{\text{наиб}}$ является 6,83, а наименьшим $x_{\text{наим}}$ - 6,68. Найдем размах варьирования *R*. :

R=6,83-6,68=0,15.

Выберем число интервалов . Для того чтобы вариационный ряд не был слишком громоздким, обычно число интервалов берут от 7 до 11. Положим предварительно v=7, тогда длина частичного интервала

$$h=\frac{R}{v}=\frac{0,15}{7}\approx 0,0214\approx 0,02.$$

За начало первого интервала рекомендуется брать величину

$x_{нач}= x_{наим}$ - 0,5h.

В данном случае $x_{нач}$ = 6,67.

Конец последнего интервала должен удовлетворять условию

$$x_{кон}-h\le x_{наиб}<x_{кон}.$$

Промежуточные интервалы получают прибавляя к концу предыдущего интервала длину частичного интервала *h* (в рассматриваемом случае h=0,02).

Теперь, просматривая результаты наблюдений, определяем, сколько значений признака попало в каждый конкретный интервал.

В таблице частота m_i, показывает, в скольких наблюдениях случайная величина приняла значения, принадлежащие тому или иному интервалу, причем нижний конец интервала входит в него, а верхний—нет.

Для данного примера интервальный вариационный представлен в таблице 2.

Таблица 15.1 - Интервальный вариационный ряд

	x_i - x_{i+1}	m_i	$\hat{p}_i$	m_i/h	$\hat{p}_i$/h
	6,67-6,69	2	0,01	100	0,5
	6,69-6,71	15	0,075	750	3,75
	6,71-6,73	17	0,085	850	4,25
	6,73-6,75	44	0,22	2200	11
	6,75-6,77	52	0,26	2600	13
	6,77-6,79	44	0,22	2200	11
	6,79-6,81	14	0,07	700	3,5
	6,81-6,83	11	0,055	550	2,75
	6,83-6,85	1	0,005	50	0,25
	$\sum$	200	1		

По данным интервального ряда строят гистограмму, представленную на рисунке 15.1.

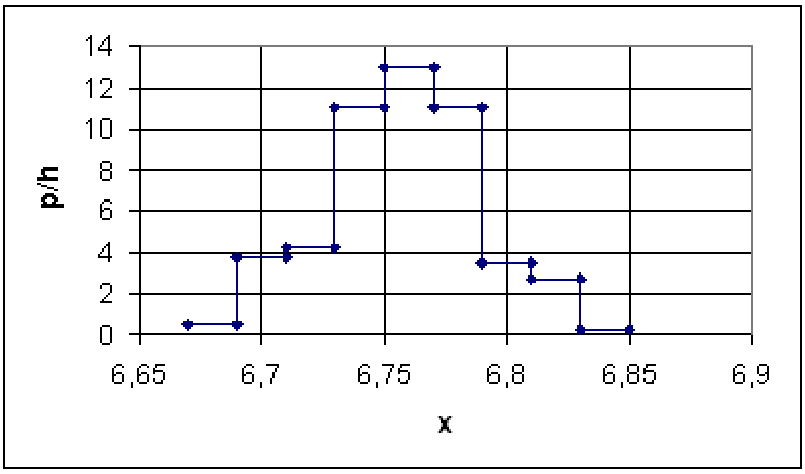


Рисунок 15.1 - Гистограмма относительных частот

3 Вопросы для самоконтроля:

Перечислить основные задачи математической статистики.

Сформулировать определение генеральной совокупности, выборки.

Виды выборок и способы отбора.

Что называется частотой и относительной частотой варианта?

Алгоритм составления дискретного вариационного ряда. Полигон частот.

Алгоритм составления интервального вариационного ряда. Гистограмма частот и гистограмма частностей, их геометрический смысл.

4 Задания:

Вариант 1

Найти относительную частоту, построить полигон частот и относительных частот:

x_i	2	3	4	5	7	8
n_i	9	6	7	4	8	5
Ω_i						

Вариант 2

Найти относительную частоту, построить полигон частот и относительных частот:

x_i	2	3	4	5	7	8
n_i	4	6	8	2	8	6
Ω_i						

Вариант 3

Найти относительную частоту, построить полигон частот и относительных частот:

n_i	7	6	5	3	8	5
Ω_i						

Вариант 4

Найти относительную частоту, построить полигон частот и относительных частот:

x_i	1	2	4	5	8	9
n_i	9	6	4	3	2	9
Ω_i						

Вариант 5

Найти относительную частоту, построить полигон частот и относительных частот:

x_i	2	3	6	7	9	10
n_i	4	3	7	4	8	5
Ω_i						

Вариант 6

Найти относительную частоту, построить полигон частот и относительных частот:

x_i	2	3	4	5	7	8
n_i	4	7	8	3	9	10
Ω_i						

Вариант 7

Найти относительную частоту, построить полигон частот и относительных частот:

x_i	1	2	5	6	7	8
n_i	7	6	5	3	8	5
Ω_i						

Вариант 8

Найти относительную частоту, построить полигон частот и относительных частот:

x_i	1	2	4	5	8	9
n_i	5	6	5	3	12	9
Ω_i						

Вариант 9

Найти относительную частоту, построить полигон частот и относительных частот:

x_i	2	3	4	5	7	8
n_i	9	5	9	3	8	5
Ω_i						

Заключение

При изучении дисциплины «Математика» данное методическое пособие могут использовать и студенты других специальностей очной и заочной форм обучения. Методические указания к практическим работам могут и использовать преподаватели для проведения практических работ по конкретным темам.

Список использованных источников

1 Валуцэ И. И., Дилигул Г. Д. “Математика для техникумов” М.:”Наука” 1990.

2 Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа, части 1и 2: Учебник под ред. Яковлева Г.Н.,1986.

3 Григорьев С.Г. Математика: Учебник для студенческих средне профессиональных учреждений – М: Издательский центр « Академия», 2005.

4 Дадаян А.А. Математика: учебник – М: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА – М,2006.

5 Максимова О.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов средних специальных учебных заведений – М: Издательско – торговая корпорация « Дамеков и », 2006.

6 Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для средне профессиональных учебных заведений – М: «Высшая школа», 2009.

7 Кочетков Е.С., Смерчинская С.О., Соколов В.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник – М: ИД «ФОРУМ» : ИНФРА – М, 2006.